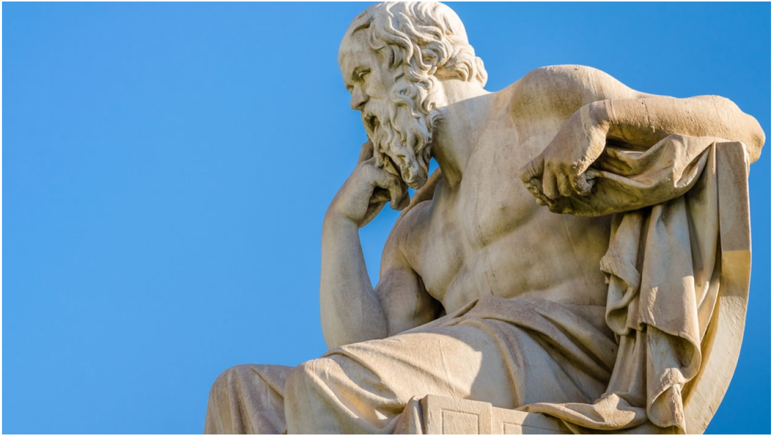
Taller Demostra

Sessió 10: Teoria de Jocs II

Edgar Moreno (UPC)

Per què existeixen les lleis?



Intuitivament, individualment tothom estaria millor si pogués fer el que volgués en tot moment.

Intuitivament, individualment tothom estaria millor si pogués fer el que volgués en tot moment.

Tanmateix, estariem pitjor si els altres també poguessin fer el que volguéssin.

Dilema del presoner

Hi ha dos presoners incomunicats. A cadascú li donen la opció de delatar l'altre presoner. Si A delata B, aleshores a A li treuen un any de presó, pero li sumen tres a B. Què haurien de fer els presoners?

Dilema del presoner

Hi ha dos presoners incomunicats. A cadascú li donen la opció de delatar l'altre presoner. Si A delata B, aleshores a A li treuen un any de presó, pero li sumen tres a B. Què haurien de fer els presoners?

	Delatar	No delatar
Delatar	$(-2,-2)$	$(1,-3)$
No delatar	$(-3,1)$	$(0,0)$

Independentment del que faci l'altre, cada presoner està millor delatant.

Dilema del presoner

Hi ha dos presoners incomunicats. A cadascú li donen la opció de delatar l'altre presoner. Si A delata B, aleshores a A li treuen un any de presó, pero li sumen tres a B. Què haurien de fer els presoners?

	Delatar	No delatar
Delatar	$(-2,-2)$	$(1,-3)$
No delatar	$(-3,1)$	$(0,0)$

Independentment del que faci l'altre, cada presoner està millor delatant.

Si tots dos es delaten, estan pitjor que si no es delaten.

Jocs en forma normal

Un joc en forma normal és una estructura $\Gamma = (I, S, u)$, on

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt de jugadors
- $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ és el conjunt d'estratègies dels jugadors (S_i és l'estratègia del jugador i)
- $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ són les funcions d'utilitat de cada jugador. Cada funció u_i va de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ a $\mathbb{R}$.

En el cas del dilema del presoner per dos jugadors, tenim:

Jocs en forma normal

Un joc en forma normal és una estructura $\Gamma = (I, S, u)$, on

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt de jugadors
- $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ és el conjunt d'estratègies dels jugadors (S_i és l'estratègia del jugador i)
- $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ són les funcions d'utilitat de cada jugador. Cada funció u_i va de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ a $\mathbb{R}$.

En el cas del dilema del presoner per dos jugadors, tenim:

- $I = \{1, 2\}$

Jocs en forma normal

Un joc en forma normal és una estructura $\Gamma = (I, S, u)$, on

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt de jugadors
- $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ és el conjunt d'estratègies dels jugadors (S_i és l'estratègia del jugador i)
- $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ són les funcions d'utilitat de cada jugador. Cada funció u_i va de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ a $\mathbb{R}$.

En el cas del dilema del presoner per dos jugadors, tenim:

- $I = \{1, 2\}$
- $S_1 = S_2 = \{\text{Delatar (D)}, \text{No delatar (ND)}\}$

Jocs en forma normal

Un joc en forma normal és una estructura $\Gamma = (I, S, u)$, on

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$ és el conjunt de jugadors
- $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ és el conjunt d'estratègies dels jugadors (S_i és l'estratègia del jugador i)
- $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ són les funcions d'utilitat de cada jugador. Cada funció u_i va de $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ a $\mathbb{R}$.

En el cas del dilema del presoner per dos jugadors, tenim:

- $I = \{1, 2\}$
- $S_1 = S_2 = \{\text{Delatar (D)}, \text{No delatar (ND)}\}$
- $u_1(D, D) = -2,\ u_1(D, ND) = 1,\ u_1(ND, D) = -3,\ u_1(ND, ND) = 0$
  $u_2(D, D) = -2,\ u_2(D, ND) = -3,\ u_2(ND, D) = 1,\ u_2(ND, ND) = 0$

Jocs en forma normal

Un joc en forma normal és una estructura $\Gamma = (I, S, u)$, on

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt de jugadors
- $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ és el conjunt d'estratègies dels jugadors (S_i és l'estratègia del jugador i)
- $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ són les funcions d'utilitat de cada jugador. Cada funció u_i va de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ a $\mathbb{R}$.

	Delatar	No delatar
Delatar	$(-2, -2)$	$(1, -3)$
No delatar	$(-3, 1)$	$(0, 0)$

Que jugaran els jugadors en aquest joc?

	A	B
A	$(2,2)$	$(3,1)$
B	$(1,3)$	$(2,2)$

L'òptim pels dos jugadors és jugar A.

Que jugaran els jugadors en aquest joc?

	A	B
A	$(2, 2)$	$(3, 1)$
B	$(1, 3)$	$(2, 2)$

L'òptim pels dos jugadors és jugar A.

Cap jugador pot incrementar la seva utilitat desviant-se de l'estratègia proposada, a diferència de les altres tres possibilitats.

Equilibri de Nash

Donat un joc $\Gamma = (I, S, u)$, una estratègia conjunta $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash si, per tot $i \in I$ i tota estratègia $\tau_i \in S_i$

$$u_i(\vec{\sigma}) \geq u_i(\vec{\sigma}_{-i}, \tau_i).$$

Equilibri de Nash

Donat un joc $\Gamma = (I, S, u)$, una estratègia conjunta $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash si, per tot $i \in I$ i tota estratègia $\tau_i \in S_i$

$$u_i(\vec{\sigma}) \geq u_i(\vec{\sigma}_{-i}, \tau_i).$$

Exemples:

	A	B
A	$(2, 2)$	$(3, 1)$
B	$(1, 3)$	$(2, 2)$

En aquest joc, l'estratègia conjunta (A, A) és un equilibri de Nash.

Equilibri de Nash

Donat un joc $\Gamma = (I, S, u)$, una estratègia conjunta $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash si, per tot $i \in I$ i tota estratègia $\tau_i \in S_i$

$$u_i(\vec{\sigma}) \geq u_i(\vec{\sigma}_{-i}, \tau_i).$$

Exemples:

	Delatar	No delatar
Delatar	$(-2, -2)$	$(1, -3)$
No delatar	$(-3, 1)$	$(0, 0)$

Al dilema del presoner, $(\text{Delatar}, \text{Delatar})$ és un equilibri de Nash.

Problema

Trobeu l'equilibri Nash d'aquest joc:

	A	B	C
A	$(0, 0)$	$(25, 40)$	$(5, 10)$
B	$(40, 25)$	$(0, 0)$	$(5, 15)$
C	$(10, 5)$	$(15, 5)$	$(10, 10)$

Problema

Trobeu l'equilibri Nash d'aquest joc:

	A	B	C
A	$(0,0)$	$(25,40)$	$(5,10)$
B	$(40,25)$	$(0,0)$	$(5,15)$
C	$(10,5)$	$(15,5)$	$(10,10)$

Hi ha tres equilibris de Nash: (B, A), (A, B) i (C, C).

Chicken game

Dos conductors es troben en una cruïlla, cadascú pot decidir si seguir avançant o aturar-se:

	Avançar	Aturar-se
Avançar	$(-100, -100)$	$(1, 0)$
Aturar-se	$(0, 1)$	$(0, 0)$

Quins són els equilibris de Nash?

Chicken game

Dos conductors es troben en una cruïlla, cadascú pot decidir si seguir avançant o aturar-se:

	Avançar	Aturar-se
Avançar	$(-100, -100)$	$(1, 0)$
Aturar-se	$(0, 1)$	$(0, 0)$

Quins són els equilibris de Nash?

- (Avançar, Aturar-se)
- (Aturar-se, Avançar)
- Cadascú avança amb probabilitat $1/101$ i s'atura amb probabilitat $100/101$.

Existència de equilibris de Nash

Per tot joc finit existeix un equilibri de Nash independentment del nombre de jugadors.

Chicken game

Equilibri Correlacionat

Una distribució sobre estratègies conjuntes és un equilibri correlacionat si cap jugador té incentiu en desviar-se independentment de l'acció que li hagi tocat.

Intuitivament, un equilibri correlacionat es dona si un mediador imparcial li diu a tothom alhora el que ha de fer, i tothom té incentiu en fer-li cas.

Chicken game

Equilibri Correlacionat

Una distribució sobre estratègies conjuntes és un equilibri correlacionat si cap jugador té incentiu en desviar-se independentment de l'acció que li hagi tocat.

Intuitivament, un equilibri correlacionat es dona si un mediador imparcial li diu a tothom alhora el que ha de fer, i tothom té incentiu en fer-li cas.

Al chicken game, un semàfor que proposa (Avançar, Aturar-se) i (Aturar-se, Avançar) amb probabilitat $1/2$ cadascuna és un equilibri correlacionat.

Jocs en forma estesa

Un joc en forma estesa és una estructura $\Gamma = (I, G, M, u)$ on

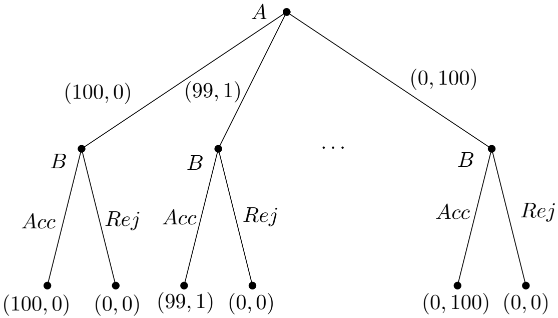
- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt dels jugadors.
- G és l'arbre decisional.
- M és una funció que diu, per cada node de l'arbre, a qui li toca jugar.
- $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és el conjunt de funcions d'utilitat dels jugadors que diuen, per cada fulla de l'arbre, quina és l'utilitat de cada jugador.

Els jocs en forma estesa inclouen també un conjunt de relacions $R = \{\sim_1, \ldots, \sim_n\}$ que indica quins nodes (o estats) són indistinguibles per cada jugador. Per exemple, dos nodes a i b estan relacionats per $\sim_i$ si i no pot distingir entre a i b. Això s'escriu com $a \sim_i b$.

Nosaltres només tractarem amb jocs amb informació perfecta.

Joc de l'ultimàtum

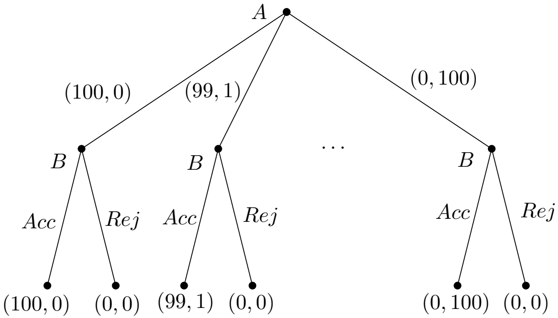
Es trien dues persones A i B a l'atzar i li donen 100$ a A. A ha d'oferir a B una manera de repartir els diners (e.g., "em quedo 60 i tu 40"). Si B accepta, es reparteixen els diners. Altrament, es queden els dos amb 0.



Què haurien de fer els jugadors?

Joc de l'ultimàtum

Es trien dues persones A i B a l'atzar i li donen 100$ a A. A ha d'oferir a B una manera de repartir els diners (e.g., "em quedo 60 i tu 40"). Si B accepta, es reparteixen els diners. Altrament, es queden els dos amb 0.



Què haurien de fer els jugadors?

Joc de l'ultimàtum

Sembla que A té la paella pel mànec: si ofereix qualsevol quantitat positiva (e.g., 99 a 1), B ha d'acceptar ja que està millor acceptant que rebutjant.

Joc de l'ultimàtum

Sembla que A té la paella pel mànec: si ofereix qualsevol quantitat positiva (e.g., 99 a 1), B ha d'acceptar ja que està millor acceptant que rebutjant.

Tanmateix, considereu la següent estratègia conjunta $\vec{\sigma}$: A proposa 1 a 99 i B rebutja tot el que sigui inferior a 99.

Joc de l'ultimàtum

Sembla que A té la paella pel mànec: si ofereix qualsevol quantitat positiva (e.g., 99 a 1), B ha d'acceptar ja que està millor acceptant que rebutjant.

Tanmateix, considereu la següent estratègia conjunta $\vec{\sigma}$: A proposa 1 a 99 i B rebutja tot el que sigui inferior a 99.

$\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash!

Joc de l'ultimàtum

Sembla que A té la paella pel mànec: si ofereix qualsevol quantitat positiva (e.g., 99 a 1), B ha d'acceptar ja que està millor acceptant que rebutjant.

Tanmateix, considereu la següent estratègia conjunta $\vec{\sigma}$: A proposa 1 a 99 i B rebutja tot el que sigui inferior a 99.

$\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash!

Tanmateix, no té gaire sentit que B rebutgi ofertes positives!

Equilibri de Nash perfecte

En un joc en forma estesa Γ, $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash perfecte si $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash en tot els sub-jocs de Γ.

Equilibri de Nash perfecte

En un joc en forma estesa Γ, $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash perfecte si $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash en tot els sub-jocs de Γ.

Considerem el sub-joc on A ja ha triat $(50, 50)$. En aquest cas, si B segueix l'estratègia $\vec{\sigma}$, hauria de rebutjar la oferta, i això es estrictament pitjor que acceptar.

Equilibri de Nash perfecte

En un joc en forma estesa Γ, $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash perfecte si $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash en tot els sub-jocs de Γ.

Considerem el sub-joc on A ja ha triat $(50, 50)$. En aquest cas, si B segueix l'estratègia $\vec{\sigma}$, hauria de rebutjar la oferta, i això es estrictament pitjor que acceptar.

$\vec{\sigma}$ no és un equilibri de Nash perfecte.

Equilibri de Nash perfecte

En un joc en forma estesa Γ, $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash perfecte si $\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash en tot els sub-jocs de Γ.

Considerem el sub-joc on A ja ha triat $(50, 50)$. En aquest cas, si B segueix l'estratègia $\vec{\sigma}$, hauria de rebutjar la oferta, i això es estrictament pitjor que acceptar.

$\vec{\sigma}$ no és un equilibri de Nash perfecte.

L'estratègia conjunta on A ofereix $(100, 0)$ i B sempre accepta és un equilibri de Nash perfecte.

L'estratègia conjunta on A ofereix $(99, 1)$ i B accepta tot el que sigui estrictament positiu és un equilibri de Nash perfecte.

Jocs repetits

Donat un joc Γ, suposem que a cada unitat de temps $t = 0, 1, \ldots$ es juga una instància de Γ. Denotem aquest joc com Γ^R.

Una estratègia per Γ^R és simplement una estratègia per cada instància de Γ. La utilitat d'un jugador és la mitjana de tota la utilitat rebuda.

Jocs repetits

Donat un joc Γ, suposem que a cada unitat de temps $t = 0, 1, \ldots$ es juga una instància de Γ. Denotem aquest joc com Γ^R.

Una estratègia per Γ^R és simplement una estratègia per cada instància de Γ. La utilitat d'un jugador és la mitjana de tota la utilitat rebuda.

Sigui Γ el dilema del presoner:

	Delatar	No delatar
Delatar	$(-2, -2)$	$(1, -3)$
No delatar	$(-3, 1)$	$(0, 0)$

Problema

Demostreu que existeix un equilibri de Nash (perfecte!) on tots dos presoners col·laboren infinitament.

Dilema del presoner repetit

Considereu l'estratègia $\vec{\sigma}$ de no delatar fins que l'altre delati. A partir d'aquí, delatar indefinidament.

Dilema del presoner repetit

Considereu l'estratègia $\vec{\sigma}$ de no delatar fins que l'altre delati. A partir d'aquí, delatar indefinidament.

Si els dos juguen aquesta estratègia, desviar-se delatant sempre és sub-òptim!

Dilema del presoner repetit

Considereu l'estratègia $\vec{\sigma}$ de no delatar fins que l'altre delati. A partir d'aquí, delatar indefinidament.

Si els dos juguen aquesta estratègia, desviar-se delatant sempre és sub-òptim!

$\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash.

Dilema del presoner repetit

Considereu l'estratègia $\vec{\sigma}$ de no delatar fins que l'altre delati. A partir d'aquí, delatar indefinidament.

Si els dos juguen aquesta estratègia, desviar-se delatant sempre és sub-òptim!

$\vec{\sigma}$ és un equilibri de Nash.

Teorema

Els "folk theorems" garantitzen equilibris d'aquest estil en jocs repetits.

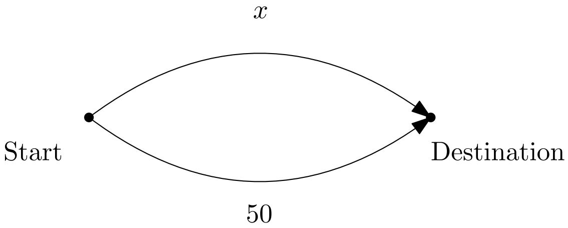
Routing games

Els routing games intenten modelar el comportament d'un col·lectiu d'individus en una xarxa de trànsit.

Routing games

Els routing games intenten modelar el comportament d'un col·lectiu d'individus en una xarxa de trànsit.

Per exemple, considereu l'exemple següent on 100 individus volen arribar d'un lloc a un altre:



El temps d'atravessar una carretera és 50, mentres que el temps d'atravessar l'altra depén de la gent que hi passi per allà. Quin és l'equilibri de Nash?

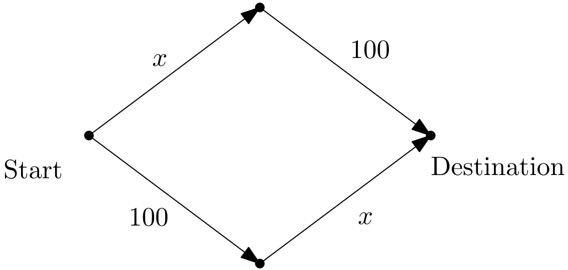
Routing games

Problema

Demostra que afegir una carretera sempre disminueix el temps mitjà en anar d'un punt a un altre.

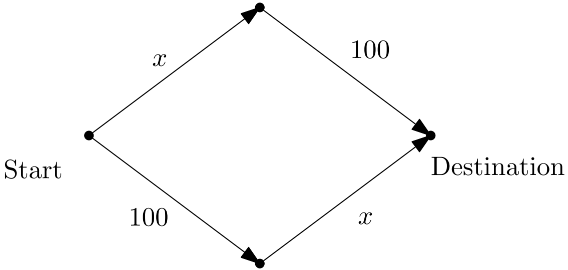
Routing games

Considereu el següent exemple:



Routing games

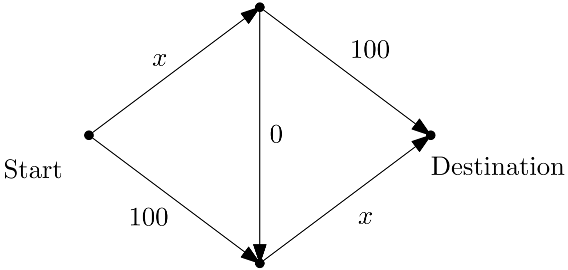
Considereu el següent exemple:



Aquí hi ha un únic equilibri de Nash, que és que 50 persones vagin pel camí de dalt i 50 vagin pel camí de baix. Cada persona triga 150 unitats de temps en arribar al destí.

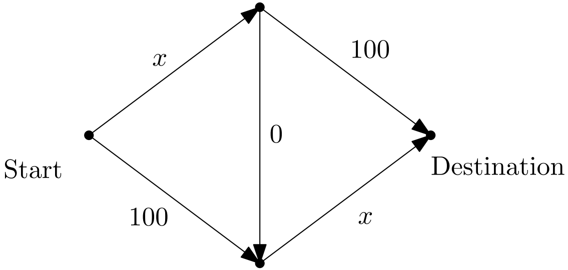
Routing games

Afegim una carretera nova:



Routing games

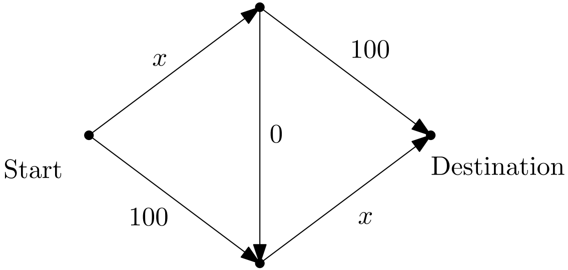
Afegim una carretera nova:



Aquí només hi ha un camí òptim, que es agafar les dues carreteres de cost x i la de cost 0. Tothom trigaria 200 unitats de temps d'aquesta manera.

Routing games

Afegim una carretera nova:



Aquí només hi ha un camí òptim, que es agafar les dues carreteres de cost x i la de cost 0. Tothom trigaria 200 unitats de temps d'aquesta manera.

Això es coneix com a paradoxa de Braess.

Podem estudiar aquest tipus de paradoxes amb els dos ratios següents. Siguin S totes les estratègies 'centralitzades' i Eq els equilibris de Nash definim:

Preu de l'anarquia (PoA)

$$PoA = \frac{\max_{s \in Eq} \mathrm{Cost}(s)}{\min_{s \in S} \mathrm{Cost}(s)}$$

Preu de l'estabilitat (PoS)

$$PoS = \frac{\max_{s \in Eq} \mathrm{Cost}(s)}{\max_{s \in S} \mathrm{Cost}(s)}$$

Subhastes

Considereu una subhasta d'un objecte entre N persones. Cada persona i té una valoració personal v_i de l'objecte en qüestió i ha de fer una oferta. Qui faci la millor oferta s'emporta l'objecte i ha de pagar els diners oferits. Quant han d'oferir els participants?

Subhastes

Considereu una subhasta d'un objecte entre N persones. Cada persona i té una valoració personal v_i de l'objecte en qüestió i ha de fer una oferta. Qui faci la millor oferta s'emporta l'objecte i ha de pagar els diners oferits. Quant han d'oferir els participants?

Cap participant i hauria d'oferir més de v_i.

Subhastes

Considereu una subhasta d'un objecte entre N persones. Cada persona i té una valoració personal v_i de l'objecte en qüestió i ha de fer una oferta. Qui faci la millor oferta s'emporta l'objecte i ha de pagar els diners oferits. Quant han d'oferir els participants?

Cap participant i hauria d'oferir més de v_i.

Si un participant creu que els altres oferiran menys, és possible que li surti a compte oferir menys de v_i.

Subhastes

Considereu una subhasta d'un objecte entre N persones. Cada persona i té una valoració personal v_i de l'objecte en qüestió i ha de fer una oferta. Qui faci la millor oferta s'emporta l'objecte i ha de pagar els diners oferits. Quant han d'oferir els participants?

Cap participant i hauria d'oferir més de v_i.

Si un participant creu que els altres oferiran menys, és possible que li surti a compte oferir menys de v_i.

Objectiu

Dissenyar una subhasta on sigui sempre òptim oferir la valuació verdadera.

Subhasta de Vickrey (Second-price)

Considereu la subhasta on li donen l'objecte a la oferta més alta, pero el guanyador de la subhasta ha de pagar la segona oferta més alta.

Problema

Demostreu que pel jugador i, independentment del que faci la resta de participants, és òptim oferir v_i.

Subhasta de Vickrey (Second-price)

Considereu la subhasta on li donen l'objecte a la oferta més alta, pero el guanyador de la subhasta ha de pagar la segona oferta més alta.

Problema

Demostreu que pel jugador i, independentment del que faci la resta de participants, és òptim oferir v_i.

Sigui v la segona oferta més alta sense comptar v_i.

- Si $v > v_i$, aleshores si i ofereix més de v, hauria de pagar més del que valora l'objecte. Si ofereix menys no canvia res.
- Si $v < v_i$, aleshores si i ofereix menys de v, es queda sense l'objecte (utilitat 0), mentres que si ofereix qualsevol cosa superior (inclou v_i), es queda l'objecte i paga v, que li dona una utilitat de $v_i - v > 0$.
- Si $v = v_i$, i rep utilitat 0 independentment del que faci.

Problema de l'herència

Tenim uns quants objectes O i uns quants hereus H. Per cada hereu $h \in H$ i objecte $o \in O$ tenim $v_h(o) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ la seva 'valoració'.
Si un hereu rep uns quants objectes la valoració total serà la suma de les valoracions individuals.

Problema de l'herència

Tenim uns quants objectes O i uns quants hereus H. Per cada hereu $h \in H$ i objecte $o \in O$ tenim $v_h(o) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ la seva 'valoració'.
Si un hereu rep uns quants objectes la valoració total serà la suma de les valoracions individuals.

Pregunta

Volem repartir els objectes de la 'millor manera': quina és aquesta?

- Maximitzar la suma de les valoracions
- Maximitzar el mínim de les valoracions
- Assegurar-nos de que ningú te "enveja". Pregunta: sempre es pot?
- Maximitzar la mitjana geomètrica
- Eficiència de Pareto: ningú pot millorar sense que ningú empitjori

Problema

Definim que una forma de repartir es quasi-sense enveja si per tots dos hereus h, h' si donem el millor objecte de h' a h llavors h no te enveja. Demostrar que podem trobar una repartició quasi-sense enveja si tots els agents valoren igual els objectes.

Problema

Definim que una forma de repartir es quasi-sense enveja si per tots dos hereus h, h' si donem el millor objecte de h' a h llavors h no te enveja. Demostrar que podem trobar una repartició quasi-sense enveja si tots els agents valoren igual els objectes.

Solució

Anem passant pels objectes i li donem a l'agent que menys valori els objectes fins al moment.