Tricks

Edgar Moreno

1 Geomètriques

Definició 1. *Una sèrie geométrica és un seguit de nombres (o expressions algebràiques) $a_0, a_1, ..., a_n$ tal que $\forall i$ tenim $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ on aquesta r és fixa i la denominem raó.*

Observació 1. *Conegut a_0 (o de fet qualsevol altre) i r tots els termes queden determinats: $a_i = a_0 * r^i$*

Demo must know 1 (Suma de una sèrie geométrica)**.** *Tenim que*

$$S = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_0 * r^i = \frac{a_0 - a_{n+1}}{1-r} = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Anem a demostrar-ho:

$$S = a_0 + r * a_0 + ... + r^n * a_0$$

$$r * S = r * a_0 + r^2 * a_1 + ... + r^n * a_0 + r^{n+1} * a_0$$

Restant:

$$(1-r)S = a_0 - r^{n+1} * a_0 \Rightarrow S = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Observació 2.

$$S = \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n} a_0 * r^i = \frac{a_k - a_{n+1}}{1-r} = \frac{a_k(1-r^{n-k+1})}{1-r}$$

és a dir podem substituir a_0 per un terme qualsevol per començar i la fórmula segueix la mateixa lògica.

Observació 3. *Si $|r| < 1$ tenim que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pel que deduim que:*

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_0 * r^i = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 - a_{n+1}}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a_0}{1-r}$$

Observació 4. *L'expressió anterior és útil en contextos formals (polinomis generadors) per exemple expressariem $1 + x + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}$*

2 Binomi de Newton

2.1 Mini repàs sobre binomials i multinomials

Definició 2. *Definim els números binomials:* $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *(n choose k). És el número de formes d'agafar k boles de n boles numerades. Òbviament si* $k < 0$ *o* $k > n$ *tenim* $\binom{n}{k} = 0$.

Definició 3. *Definim els números binomials:* $\binom{n}{k_1,...,k_q} = \frac{n!}{\prod k_i!}$ *on necessitem que* $\sum k_i = n$. *És la forma de pintar* k_i *boles del color i. Observem que* $\binom{n}{k_1,...,k_q} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2,...,k_q}$

Observació 5. *Els números binomials que formen el triangle de Tartaglia compleixen moltes propietats:*

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\sum_{i=0}^{n} C(n,i) = 2^n$
- $\sum_{i=0}^{n/2} C(n, 2*i) = \sum_{i=0}^{n/2} C(n, 2*i+1) = 2^{n-1}$
- *Hockey-Stick lemma:* $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$ *o* $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$ *(gràficament s'enten bé)*

2.2 Elevar coses a la n

Teorema 1 (Binomi de Newton)**.** *Per elevar binomis:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Teorema 2 (Multinomial theorem)**.** *Per elevar sumes de moltes coses:*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{b_1+...+b_k=n} \binom{n}{b_1,...,b_k} a_1^{b_1}...a_k^{b_k}$$

Observem que si $n = 2$ *recuperem el de Newton i que els* b_i *son no negatius.*

Demo must know 2 (Wtf diu lo de adalt)**.** *Observem que* $(a_1+a_2+...+a_k)^n = (a_1+a_2+...+a_k)(a_1+a_2+...+a_k)...(a_1+a_2+...+a_k)$ *n cops. Ara aplicant la propietat distributiba cada sumand del resultat serà escollir un element de cada parèntesi. Ara observem que el número de formes de escollir elements tal que la seva multiplicació sigui* $a_1^{b_1}...a_k^{b_k}$ *és* $\binom{n}{b_1,...,b_k}$ *amb el que concloem.*

3 Desigualtats

De desigualtats n'hi han moltes i moltíssimes formes d'operar amb elles. Al final la majoria es redueixen a la següent llista:

- $x^2 \geq 0$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $e^x \geq x+1$ i $e^x = x+1 \iff x = 0$
- $a > b \iff -a < -b$
- $a < b$ i $c < d$ llavors $a+c < b+d$

I algunes una mica més profundes:

Teorema 3 (Desigualtats de mitjanes)**.** *Donada una col·lecció de n no negatius a_i:*

$$\min a_i \leq (\prod a_i)^{1/n} \leq \frac{\sum a_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}} \leq \max a_i$$

En general si $a < b$ llavors:

$$(\frac{\sum a_i^a}{n})^{1/a} \leq (\frac{\sum a_i^b}{n})^{1/b}$$

I les igualtats es donen si només si els a_i són tots iguals.

Observació 6 (Desigualtat aritmètico-geomètrica o AM-GM)**.** *Del teorema anterior a la pràctica lo important és que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$*

Teorema 4 (Couchy-Schwarz)**.** *$a * b \leq |a||b|$ i l'igualtat es dona només si son paral·lels. (estem parlant de vectors però si expandim la desigualtat és interesant en molts contextos)*

Teorema 5 (Desigualtat de reordenament)**.** *Si $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ i $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ la forma de emparellar cada a amb un b multiplicar i sumar-los a.k.a $\sum a_i b_{\sigma(i)}$ que maximitza el resultat és $\sum a_i b_i$ i la que el minimitza és $\sum a_i b_{n-i+1}$. És a dir els grans amb els grans per maximitzar i els grans amb els petits per minimitzar.*

Teorema 6 (El més important)**.** *$f(x)$ derivable implica que els màxims i mínims es donen on $f'(x) = 0$*

El treballar amb desigualtats resulta de vegades bàsic en el context de intercanviar ordre de sumatoris i semblants però és un tema molt pràctic i molt poc teóric.

4 Trigonomàgia

Teorema 7 (Tot surt d'aqui. Moivre)**.** $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

Teorema 8 (I d'aqui)**.** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Observació 7. *Identitats a saber:*

- $\arccos\sin x = \sqrt{1-x^2}$
- $\arcsin\cos x = \sqrt{1-x^2}$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Observació 8. *Identitats a saber (deduïr)*

- $\cos(\alpha+\beta) = Real(e^{i(\alpha+\beta)}) = Real(e^{i\alpha}e^{i\beta}) = Real((\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- *Per al sinus de la suma, les respectives restes i angles dobles operem igual.*
- $\cos a = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$
- $\sin a = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$

5 Randoms

Observació 9 (Cardano-Vieta)**.** *Si α, β són les arrels de $x^2 + ax + b$ tenim $\alpha\beta = b$ i $\alpha + \beta = -a$. La suma dels VAPs (amb multiplicitat) és la traça i la multiplicació el determinant (útil per comprovar càlculs).*

Observació 10 (Bolzano)**.** *Si f continua i $f(a)f(b) < 0$ llavors $f(c) = 0$ per c entre a i b.*

Observació 11 (Fraccions simples)**.** *Si a un problema hi ha una cosa de la forma $\frac{algo}{(a+b)(c+d)}$ es pot (i 8 de cada 10 cops el problema es resoldra així) expressar $\frac{algo}{(a+b)(c+d)} = \frac{algo'}{a+b} + \frac{algo''}{c+d}$*

Observació 12 (Arrels de l'unitat)**.** *Si $k \in Z$ tenim $x^n = 1 = e^{2\pi k} \implies x = e^{\frac{2\pi k}{n}}$ i només ens cal k entre 0 i $n-1$. De la mateixa forma trobem qualsevol arrel n-essima d'un número. A més per les formule de Cardano Vieta tenim que $\sum arrelsn-essimesde1 = 0$ i $\sum arrelsn-essimesde1 = \pm 1$ segons la paritat.*

logs, perm